6-апта.

Интегралдық қосынды. Анықталған интеграл. Анықталған интегралды интегралдау әдістері.

Мысал №1. $\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{8}{3}.$

Мысал №2. $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx$ есепте.

► $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx = \int_0^8 \sqrt{2x}\,dx + \int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{1}{2}\frac{(2x)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^8 + \frac{x^{4/3}}{4/3}\Big|_0^8 = \frac{1}{3}(16)^{3/2} + \frac{3}{4}(8)^{4/3} = 33\frac{1}{3}.$ ◄

Мысал №3. $\int_0^{\pi/2} sin^3 \varphi d\varphi$ тап.

► $\int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi d\varphi = -\int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2 \varphi\right) d(\cos\varphi) = -\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos^3 \varphi}{3}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$ ◄

Мысал №4. $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$ интегралын есептелік, ол үшін $x = \sin t$ белгілеуін енгіземіз:

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \Big| x = \sin t, dx = \cos t dt; (x = 0) \Rightarrow (\sin t = 0) \Rightarrow (t = 0); (x = 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sin t = 1) \Rightarrow \left(t = \frac{\pi}{2}\right)\Big| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\,\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= \left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{\pi}{4}$$

Бұл интеграл центрі координат басында, бірінші квадрантта жататын радиусы бірге тең дөңгелектің ауданының төрттен бір бөлігіне тең.

Мысал №5. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$. интегралын есепте.

►Мынадай белгілеу енгізелік $\sqrt{1+x}=t$. Онда $x=t^2-1,\ dx=2tdt$.

Егер $x=3$ болса, онда $t=2=\alpha$, ал егер $x=8$ болса, онда $t=2=\alpha$

Бұдан, $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2\int_2^3 (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_2^3 = 2(9-3)-2\left(\frac{8}{3}-2\right) = \frac{32}{3}$. ◄

Мысал №6. Есепте: $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3}$.

► $tg(x/2)=u$ белгілеуін енгіземіз, онда $\cos x = (1-u^2)/(1+u^2),\ dx = 2du/(1+u^2)$,

$\alpha = tg0 = 0,\ \beta = tg(\pi/4)=1$.

Бұдан, $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3} = \int_0^1 \frac{2du/(1+u^2)}{2(1-u^2)/(1+u^2)+3} = \int_0^1 \frac{2du}{u^2+5} = \frac{2}{\sqrt5} arctg \frac{u}{\sqrt5}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt5} arctg\frac{1}{\sqrt5} \approx$

$\approx 0,38$.◄

Мысал №7.

$$\int_1^e x\ln x dx=\int_1^e \ln x d\frac{x^2}{2}=\left|u=\ln x, du=\frac{1}{x}dx, v=\frac{x^2}{2}\right|=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{e^2}{2}\ln e-0-\int_1^e\frac{x}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

Мысал №8. $\int_0^{\pi/2} x\cos xdx$ есепте.

▶ $$\int_0^{\pi/2} x\cos xdx=\left|\begin{matrix}u=x, & du=dx, \\ dv=\cos xdx, & v=\sin x\end{matrix}\right|=x\sin\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin xdx=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-0+\cos x\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-1.$$ ◀

Мысал №9. $\int_1^e x\,ln^2\,xdx$ тап.

▶ $$\int_1^e x\ln^2 xdx=\left|\begin{matrix}u=\ln^2 x, & du=2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx, \\ dv=xdx, & v=\frac{1}{2}x^2\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x\Big|_1^e-\int_1^e x\ln xdx=\left|\begin{matrix}u=\ln x, & du\frac{1}{x}dx, \\ dv=xdx, & v=\frac{1}{2}x^2\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\left(\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}x^2\frac{1}{2}dx\right)=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{1}{4}x^2\Big|_1^e=\frac{1}{4}\left(e^2-1\right).$$ ◀